8. Mrznutie kvapky

Richard Hlubina

UK Bratislava

Úvodné sústredenie TMF, Bratislava 8.11. 2013

Zadanie

Umiestnite kvapku vody na platňu schladenú na približne -20 °C. Počas zamŕzania sa tvar kvapky môže postupne zmeniť na kužeľovitý s ostrým špicom. Preskúmajte tento jav.

Literatúra

- Iľja Marčenko: `http://kit.ilyam.org/`
- J. H. Snoeijer and P. Brunet, Am. J. Phys. 80, 764 (2012)
- O. R. Enríquez, A. G. Marín, K. G. Winkels, and J. H. Snoeijer, arXiv1110.3698, Phys. Fluids 24, 091102 (2012)
- M. Nauenberg, Am. J. Phys. 81, 150 (2013)

- video
- chladenie: suchý ľad, podložka: sklo, $T \approx -20^{\circ}$C, kvapka $D \approx 2$ mm, $T \approx 20^{\circ}$C, deionizovaná a odplynená voda, červené potravinové farbivo (kontrast)

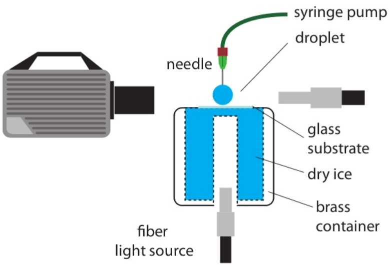
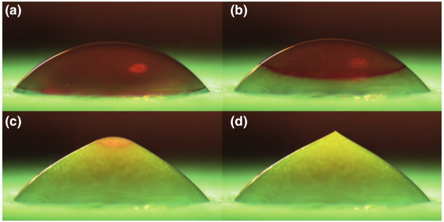


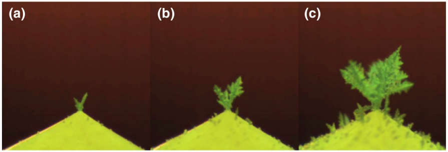
Figure 1: Illustration of the experimental setup.

meranie teploty podložky: termočlánok
farebná kamera: 50 obr./s, 2048 $\times$ 1152 pixelov, 3 μm/ pixel
spätné alebo spodné osvetlenie

- kvapka s polomerom základne ≈2 mm
  v časoch t, $t + 4.6$s, $t + 16.0$s, $t + 17.3$s

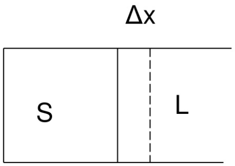


- rast kryštálov ľadu na zmrznutej kvapke



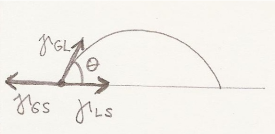
Rovnovážny tvar kvapky

- povrchové napätie



povrchová energia: $E = \gamma S$
prírastok energie: $\Delta E = \gamma L \Delta x$
sila na čiaru dĺžky L: $F = \gamma L$

- kvapka bez gravitácie: guľový vrchlík, polomer R_0

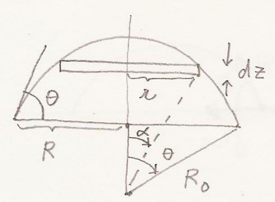


rovnováha síl:
$\gamma_{GS} = \gamma_{LS} + \gamma_{GL} \cos\theta$
(Young-Dupree)

- vplyv gravitácie: porovnaj hydrostatický tlak $\approx \rho g R_0$ a Laplaceov tlak $\frac{2\gamma}{R_0}$
- možno gravitáciu zanedbať?

Trochu geometrie

- vrchlík s podstavou R a uhlom θ:



- objem vrchlíka je súčtom objemov diskov s výškami dz a polomermi r:

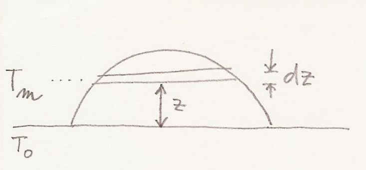
$$V = \int_{R_0 \cos\theta}^{R_0} dz \pi r^2$$

- ak využijeme, že $z = R_0 \cos\alpha$, $r = R_0 \sin\alpha$ a $R = R_0 \sin\theta$:

$$V = \pi R_0^3 \int_0^\theta d\alpha \sin^3\alpha = \pi R^3 \frac{\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2}{3\sin^3\theta}$$

Ako rýchlo kvapka zmrzne: odhad

- nech v danom okamihu sa rozhranie ľad-voda nachádza vo výške z:



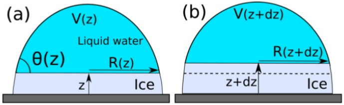
- pri mrznutí sa za čas dt uvoľní skupenské teplo: $dQ = Sc_m dz$
- toto teplo musí odtiecť: $dQ = j_Q S dt$
- tok tepla cez ľad: $j_Q = \kappa \frac{\Delta T}{z}$ kde $\Delta T = T_m - T_0$
- porovnanie $dQ = dQ$:

$$c_m dz = \frac{\kappa \Delta T}{z} dt; \qquad \int z dz = \frac{\kappa \Delta T}{c_m} \int dt; \qquad \frac{1}{2} z^2 = \frac{\kappa \Delta T}{c_m} t$$

- správny rádový odhad?

Tvar kvapky: jednoduchá teória (Snoeijer et al.)

- nech ľad narastie z hrúbky z na $z + dz$:



- predpoklady: rovinné rozhranie voda-ľad; uhol θ rovnaký pre vodu aj ľad
- tvar kvapky: $\theta = \theta(z)$, $R = R(z)$
- objem kvapalnej časti: $V = \pi R^3 \frac{\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2}{3\sin^3\theta}$
- rovnica pre uhol θ:

$$\tan\theta = -\frac{dz}{dR}$$

- úbytok objemu kvapky: $\rho_L dV = -\rho_S \pi R^2 dz$; rovnica pre V:

$$\frac{dV}{dz} = -\nu\pi R^2; \qquad \nu = \frac{\rho_S}{\rho_L}$$

Tvar kvapky: jednoduchá teória (Snoeijer et al.)

- rovnice pre tvar kvapky (po vylúčení V):

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dz} &= -\frac{1}{\tan\theta} \\ \frac{d\theta}{dz} &= -\frac{\nu - (1-\nu)(2\cos\theta + \cos^2\theta)}{R} \end{aligned}$$

- rovnice možno riešiť minimálne numericky, ak poznáme $R(0)$ a $\theta(0)$
- naozaj, zvoľme krok Δz, potom

$$R(\Delta z) = R(0) + \left.\frac{dR}{dz}\right|_{z=0} \Delta z; \qquad \theta(\Delta z) = \theta(0) + \left.\frac{d\theta}{dz}\right|_{z=0} \Delta z$$

$$R(2\Delta z) = R(0) + \left.\frac{dR}{dz}\right|_{z=\Delta z} \Delta z; \qquad \theta(2\Delta z) = \theta(0) + \left.\frac{d\theta}{dz}\right|_{z=\Delta z} \Delta z$$

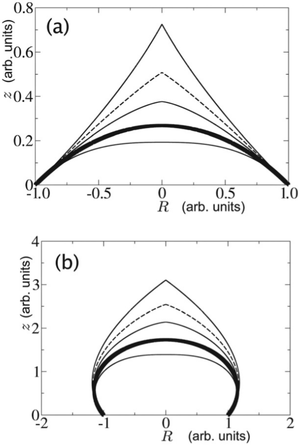
- atď. pre $R(3\Delta z), R(4\Delta z), \dots$ a $\theta(3\Delta z), \theta(4\Delta z), \dots$

Tvar kvapky: jednoduchá teória (Snoeijer et al.)

- tvar kvapky závisí od $\theta(0)$ a od parametra $\nu = \frac{\rho_S}{\rho_L}$
- špic vzniká iba pre $\nu < \frac{3}{4}$ nezávisle od $\theta(0)$
- uhol špicu:

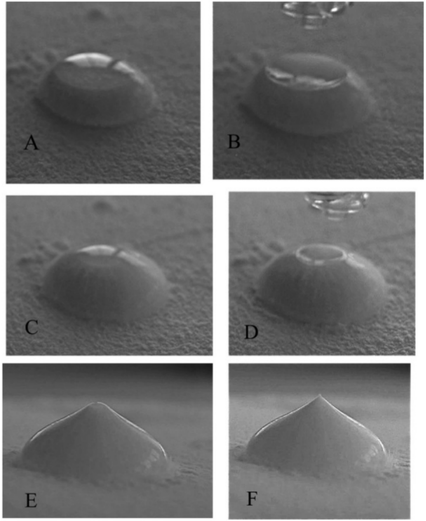
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\nu}} - 1$$

- ale pre vodu $\nu \approx 0.9$; treba vylepšiť teóriu!

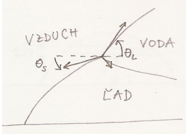


numerické výsledky pre 2 rôzne $\theta(0)$ a pre rôzne parametre $\nu = \frac{\rho_S}{\rho_L}$

Pozorovania Nauenberga (veľké kvapky, $R \approx 16$ mm, $t \approx 256$ s)



- na priesečnici rozhraní voda-ľad-vzduch platí $\theta_L \approx \theta_s$:



- rozhranie voda-ľad nie je rovinné!
- niekedy vznikne kužeľ:

Čo ďalej?

jednoduché veci boli preskúmané, ostávajú už len ťažšie a ťažké:

- závisí uhol špicu od veľkosti kvapky? (rola gravitácie)
- závisí uhol špicu od materiálu podložky? (rola $\theta(0)$)
- závisí uhol špicu od povrchového napätia na rozhraní voda-vzduch? (saponát?, pozor na zmenu mrznutia!)
- závisí uhol špicu od parametra ν? (ako zmeniť ν?)
- prečo rozhranie voda-ľad nie je rovinné?
  akými mechanizmami odteká teplo z kvapky? (odhad časov)
  zmení odsávanie pár tvar kvapky?
  zmení počiatočná teplota vody tvar kvapky?
- ...